

УДК 551.465.7

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НА ВОДЕ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ВЕТРОМ

© 1995 г. В. П. Реутов, Ю. И. Троицкая

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 28.12.93 г.

Исследуется нелинейное взаимодействие двумерной волны на поверхности воды с турбулентным пограничным слоем атмосферы. Анализ основывается на использовании ортогональной системы криволинейных координат, изотропной аппроксимации для турбулентной вязкости, приближения аэродинамически гладкой поверхности воды и квазилинейной модели взаимодействия среднего ветрового потока с волновым полем. Изучено поведение амплитудной зависимости скорости роста волны и добавки к средней скорости ветра вдали от поверхности в широком диапазоне длин волн и скоростей трения ветра. Обсуждается роль нелинейности воздушного потока при возбуждении волн вблизи порога устойчивости.

Проведенные в последнее время исследования генерации поверхностных волн турбулентным ветром показали, что роль нелинейных эффектов в этом процессе весьма существенна [1 - 3]. Наибольший интерес представляет определение амплитудной зависимости скорости роста (инкремента) поверхностных волн и деформации профиля средней скорости в атмосферном пограничном слое. Квадратичная по амплитуде добавка к инкременту линейной задачи входит в динамическое уравнение для модулированных волн вблизи порога устойчивости [4]. Информация о зависимости инкремента от амплитуды может быть использована, в частности, для уточнения границ применимости теории слабой турбулентности поверхностных волн [5, 6].

Нелинейная скорость роста двумерной волны вычислялась в [7] в приближении идеального ламинарного потока. В [8] производилась грубая оценка нелинейного ослабления инкремента в случае турбулентного ветра, основанная на использовании результатов асимптотической теории устойчивости. В то же время, как показано в [9], толщина критического слоя, определяемая турбулентной вязкостью, обычно не является малой по сравнению с масштабом профиля скорости среднего течения, что исключает уверенное использование асимптотической теории.

В ряде работ [1 - 3, 10, 11] для анализа нелинейных эффектов взаимодействия волн с турбулентным ветром использовалось прямое численное моделирование, опирающееся на сложные схемы параметризации турбулентности. Однако эти эффекты могут быть описаны с хорошей точностью на основе более простого подхода, предложенного в работе [12]. В этой работе для анализа нелинейного взаимодействия волн с ветром использо-

валось квазилинейное приближение, а уравнения гидродинамики формулировались в криволинейных координатах. Параметризация турбулентности ветра осуществлялась в рамках модели замыкания первого порядка. Заметим, что квазилинейное приближение в интерпретации [12] существенно отличается от предложенного ранее в [13]. В рамках подхода [13] каждая из волн широкого волнового пакета взаимодействует со своим резонансным уровнем на профиле среднего течения, тогда как в теории, развитой в [12], вследствие большой толщины вязкого критического слоя отдельные волны деформируют среднее течение практически во всей области локализации волнового поля.

Приведенные в [12] результаты расчетов для монохроматических волн довольно отрывочны (в частности не рассматривались зависимости нелинейных параметров взаимодействия волны с ветром от длины волны и скорости ветра). В настоящей работе исследуются нелинейные характеристики взаимодействия двумерных волн с ветром в широком диапазоне длин волн и динамических скоростей трения. В отличие от [12] взволнованная поверхность предполагается аэродинамически гладкой. Кроме того, проводится анализ установления стационарного профиля средней скорости при возбуждении волны, и рассмотрена стационарная генерация волн вблизи порога устойчивости.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим турбулентный пограничный слой над водной поверхностью. Будем считать, что вдоль поверхности распространяется двумерная гармоническая волна с волновым числом k и

амплитудой возвышения поверхности a . Для рассмотрения волн с амплитудами, существенно превосходящими толщину вязкого подслоя атмосферного пограничного слоя (что типично для натуральных и лабораторных условий), необходимо перейти к криволинейной системе координат, в которой поверхность воды совпадает с координатной линией. Выберем криволинейные координаты, следуя [11]:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \operatorname{Re}(iae^{ik\xi - k\eta}), \\ y &= \eta + \operatorname{Re}(ae^{ik\xi - k\eta}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y – декартовы координаты в системе отсчета движущейся с фазовой скоростью волны c , а ξ, η – криволинейные координаты (x и ξ отсчитываются в направлении течения). Как отмечалось в [12], координатная линия $\eta = 0$ соответствует профилю волны Стокса с точностью до $(ka)^2$. Закон сохранения горизонтальной компоненты импульса в криволинейных координатах (1) принимает вид

$$\frac{\partial(uJ)}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + \frac{\partial P_2}{\partial \eta} = 0, \quad (2)$$

$$P_1 = x_\xi(u^2 + p - \sigma_{11}) - x_\eta(uv - \sigma_{12}),$$

$$P_2 = x_\xi(uv - \sigma_{12}) + x_\eta(u^2 + p - \sigma_{11}).$$

Здесь $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ – якобиан преобразования (1), u ,

v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, p – давление, отнесенное к плотности воздуха ρ_a ; σ_{ij} – турбулентные напряжения. Для аппроксимации турбулентных напряжений воспользуемся градиентной моделью [14]:

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3}e\delta_{ij} + v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (3)$$

Здесь e – средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций, δ_{ij} – символ Кронекера, v – эффективный коэффициент вязкости турбулентного ветра, равный сумме коэффициентов молекулярной (ν_a) и турбулентной вязкости [14]. Предполагается, что v является заданной функцией η .

Введем, как обычно, функцию тока ψ , такую, что $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$, и завихренность течения (с обратным знаком), $\chi = \psi_{yy} + \psi_{xx}$. Тогда после ряда преобразований (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi_y J)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_y \psi_\eta + p_{\text{eff}} x_\xi - v \chi y_\xi) - \\ - \frac{\partial}{\partial \eta}(\psi_y \psi_\xi + p_{\text{eff}} y_\xi + v \chi x_\xi) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_{\text{eff}} = p + (2/3)e$. Из уравнения (4) следует простая интегральная форма закона сохранения им-

пульса. Проинтегрируем (4) по области, ограниченной линиями $\eta = \text{const}$, $\xi = 0$ и $\xi = 2\pi/k = \lambda$ (λ – длина волны) и простирающейся до $\eta = \infty$. Тогда для стационарной ($\partial/\partial t = 0$) волны получим

$$\begin{aligned} v \chi_0|_{\eta=\infty} - v \chi_0|_{\eta=0} = \\ = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda [\psi_y \psi_\xi - ka(p_{\text{eff}} \sin k\xi + v \chi \cos k\xi)] d\xi|_{\eta=0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\chi_0 = (1/\lambda) \int_0^\lambda \chi d\xi$. Заметим, что $\rho_a v \chi_0$ есть продольная компонента усредненного по периоду потока импульса через координатную поверхность $\eta = \text{const}$ по направлению к воде.

При расчетах волнового поля в воздухе будем использовать систему уравнений гидродинамики в переменных функция тока – завихренность. С учетом градиентной аппроксимации (3) она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi J^3)}{\partial t} + J^2(\psi_\eta \chi_\xi - \psi_\xi \chi_\eta - J \Delta(\chi v)) = \\ = -2v_{\eta\eta} \psi_{\xi\xi} J - J_\eta((\psi_\eta v_\eta)_\eta - v_\eta \psi_{\xi\xi}) - \end{aligned} \quad (6a)$$

$$- J_\xi(2v_\eta \psi_{\xi\eta} - \psi_\xi v_{\eta\eta}) + \psi_\eta v_\eta \frac{J_\xi^2 + J_\eta^2}{J},$$

$$\Delta \psi \equiv \frac{1}{J}(\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}) = \chi, \quad (6b)$$

$$(J = 1 - 2kae^{-k\eta} \cos k\xi + (ka)^2 e^{-2k\eta}).$$

Система (6) должна быть дополнена граничными условиями непротекания [15]

$$\psi_\xi|_{\eta=0} = 0 \quad (7)$$

и прилипания

$$\psi_\eta|_{\eta=0} = -c + 2kac \operatorname{Re}(e^{ik\xi}) \quad (8)$$

на поверхности раздела вода–воздух и условием отсутствия волновых возмущений на бесконечности.

2. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для решения нелинейной системы (6) воспользуемся квазилинейной моделью в интерпретации [12], когда не учитываются высшие гармоники возмущения, основная гармоника определяется с точностью до членов порядка ka , а средние поля – с точностью до членов $(ka)^2$. Это означает, что в уравнениях для возмущений сохраняются слагаемые порядка $(ka)^3$, обусловленные присутствием индуцированного течения. В то же время, слагаемые, имеющие формально тот же порядок $(ka)^3$ и возникающие в результате нелинейного взаимодействия первой и второй гармоник, отбрасываются. Контрольные вычисления, проведенные с уче-

том второй гармоники, показали, что ее вклад в инкремент поверхностных волн незначителен при достаточно малой крутизне волны ka . Подобный подход был реализован в [12] с использованием системы уравнений гидродинамики в переменных скорость – давление. Запись уравнений через завихренность и функцию тока оказывается более предпочтительной при численном решении задачи, поскольку приводит к более быстрой сходимости итерационной процедуры (см. ниже). Итак, ищем решение системы (6) в виде

$$\chi = \chi_0(\eta) + \text{Re}(\chi_1(\eta)e^{ik\xi}), \quad (9a)$$

$$\psi = \psi_0(\eta) + \text{Re}(\psi_1(\eta)e^{ik\xi}). \quad (9b)$$

После ряда громоздких преобразований¹ можно получить систему связанных уравнений для первой гармоники

$$ik(u_0\chi_1 - \psi_1\chi_{0\eta}) = \frac{d^2}{d\eta^2}(\chi_1 v) - k^2\chi_1 v + \quad (10a)$$

$$+ 2\psi_1 k v_{\eta\eta} - 2kae^{-k\eta}(v_{\eta}u_0)_{\eta},$$

$$\psi_{1\eta\eta} - k^2\psi_1 = \chi_1 - 2kae^{-k\eta}\chi_0 \quad (10b)$$

и среднего течения

$$\frac{d^2}{d\eta^2}(v\chi_0) - k\frac{d}{d\eta}[kav_{\eta}\text{Re}(\psi_{1\eta} - k\psi_1)e^{-k\eta} + \quad (11a)$$

$$+ 2(ka)^2 e^{-2k\eta}v_{\eta}u_0] = -\frac{1}{2}k\frac{d}{d\eta}\text{Im}(\psi_1^*\chi_1),$$

$$\frac{du_0}{d\eta} = \chi_0(1 + (ka)^2 e^{-2k\eta}) - ka e^{-k\eta}\text{Re}(\chi_1). \quad (11b)$$

В (10) и (11) введена функция $u_0(\eta) = d(\psi_0)/d\eta$, которая при $k\eta \gg 1$ совпадает с горизонтальной компонентой скорости среднего течения. Из (7) и (8) следуют граничные условия для первой гармоники в виде

$$\psi_1|_{\eta=0} = 0, \quad \psi_{1\eta}|_{\eta=0} = 2kac, \quad \psi_1|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (11a) по η от ∞ до η , получим

$$\frac{d}{d\eta}(v\chi_0) = k \left[kav_{\eta}\text{Re}(\psi_{1\eta} - k\psi_1)e^{-k\eta} + \quad (13)$$

$$+ 2(ka)^2 e^{-2k\eta}v_{\eta}u_0 - \frac{1}{2}\text{Im}(\psi_1^*\chi_1) \right].$$

Значение производной $v\chi_0$ по η при $\eta \rightarrow \infty$ принято в (13) равным нулю, как это следует из (2). Обозначим правую часть (13) через $-dT/d\eta$, где $T(\eta)$ удовлетворяет условию $T(\infty) = 0$. Функция $T(\eta)$ представляет собой волновую (явно завися-

¹ Для проведения аналитических преобразований нами использовался пакет прикладных программ.

щую от a) компоненту среднего потока импульса в законе сохранения (5). В квазиламинарной модели Майлса $T(\eta)$ имеет вид перепада со скачком в критическом слое. Действие турбулентной вязкости “размывает” этот скачок, однако масштаб его локализации вблизи поверхности не превосходит $1/k$.

Из условия прилипания (8) следует граничное условие для среднего течения на поверхности воды:

$$u_0|_{\eta=0} = -c. \quad (14)$$

Пусть в отсутствие волны турбулентный поток импульса к воде равен $\rho_a u_*^2$, где u_* – динамическая скорость трения ветра. За пределами вязкого подслоя эффективная вязкость имеет вид [14] $\nu = \kappa u_* \eta$ ($\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана) и реализуется логарифмический профиль скорости:

$$u_0|_{a=0} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} - c, \quad (15)$$

где высота эффективной шероховатости η_0 интегральным образом связана с ν . Используя безразмерные переменные $\eta^+ = u_* \eta / \nu_a$, $\eta_0^+ = u_* \eta_0 / \nu_a$, можно записать для нее выражение вида

$$\ln(\eta_0^+) = \lim_{\eta^+ \rightarrow \infty} \left[\ln(\eta^+) - \kappa \int_0^{\eta^+} \frac{d\eta_1^+}{\nu(\eta_1^+)} \right]. \quad (16)$$

Достаточно нетривиальной представляется постановка граничного условия для уравнения (13) при $\eta \rightarrow \infty$ в присутствии волны. Используя введенную выше функцию $T(\eta)$, получим из (13) соотношение

$$v\chi_0(\eta) + T(\eta) = v\chi_0|_{\eta \rightarrow \infty}. \quad (17)$$

Формула (17), по существу, является записью закона сохранения (5), в которой волновая часть потока импульса выражена через гармоники χ и ψ . Заметим, что величина среднего по периоду волны турбулентного потока импульса к поверхности в правой части (17) является произвольной постоянной. На первый взгляд, исходя из того, что воздушный поток на больших расстояниях от поверхности не должен “замечать” присутствия волны, следует положить эту постоянную равной потоку импульса при $a = 0$:

$$v\chi_0|_{\eta \rightarrow \infty} = u_*^2. \quad (18)$$

Однако эти соображения неприменимы, если ставится задача о построении совокупности стационарных решений (6), которые реализуются при медленном переходе от невозмущенного течения ($a = 0$) к состоянию с амплитудой $a = \text{const}$. В этом случае для фиксированных $\eta \gg k^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$ в принципе может установиться значение $v\chi_0(\eta)$,

зависящее от амплитуды волны a . Таким образом, величину постоянной в правой части (17) следует определять из решения задачи о возбуждении волны. Этот вопрос изучен в Приложении, где показано, что граничное условие для уравнения (11а) остается в форме (18).

3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ ИНКРЕМЕНТА

В квазилинейном приближении из закона сохранения импульса (5) следует соотношение

$$v\chi_0|_{\eta \rightarrow \infty} - v\chi_0|_{\eta \rightarrow 0} = \frac{1}{2}ka \operatorname{Im}(p_1 - iv\chi_1)|_{\eta=0}. \quad (19)$$

Здесь p_1 — комплексная амплитуда первой гармоники давления p , которое при $\eta = 0$ совпадает с p_{eff} (в этом случае $e = 0$). Поскольку коэффициент эффективной вязкости v удовлетворяет условиям $v_\eta = v_{\eta\eta} = 0$ при $\eta = 0$ [14], для вычисления p_1 можно воспользоваться результатами работы [15], в которой приведены уравнения гидродинамики в криволинейных координатах при $v = \text{const}$. Выражение для p_1 можно записать в виде (см. формулу (2.14) в [15])

$$p_1 = u_{0\eta}\Psi_1 - u_0\Psi_{1\eta} - kau_0^2 e^{-k\eta} + v\chi_{1\eta}(ik)^{-1}|_{\eta=0}.$$

Учитывая граничные условия (12), получим

$$\operatorname{Im}(p_1) = -\frac{v}{k} \operatorname{Re}(\chi_{1\eta})|_{\eta=0}. \quad (20)$$

В результате (19) перепишется в виде

$$\begin{aligned} v\chi_0|_{\eta \rightarrow \infty} - v\chi_0|_{\eta \rightarrow 0} &= \\ &= -\frac{ka}{2} v \operatorname{Re}(\chi_{1\eta} k^{-1} + \chi_1)|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая влияние касательных напряжений, возникающих на поверхности воды, можно получить следующее выражение для "ветровой" составляющей инкремента волны [12, 16]:

$$\begin{aligned} \gamma^{(a)} &= \operatorname{Im}[\omega(k, a)] = \\ &= \frac{1}{2ac} \frac{\rho_a}{\rho_w} \operatorname{Im}(p_1 + \delta_{11} + i\delta_{12})|_{\eta=0}, \end{aligned}$$

где δ_{11} и δ_{12} — первые гармоники градиентной части турбулентных напряжений (3). Записывая δ_{11} и δ_{12} в криволинейных координатах и используя (20), можно преобразовать это выражение к виду

$$\gamma^{(a)} = -\frac{1}{2kac} \frac{\rho_a}{\rho_w} v \operatorname{Re}(\chi_{1\eta} - k\chi_1)|_{\eta=0}$$

(ρ_w — плотность воды). В теории ветровых волн часто используется так называемый коэффициент

взаимодействия волн с ветром β , связанный с инкрементом соотношением [17]:

$$\gamma^{(a)} = \frac{1}{2} \omega \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{u_*}{kc} \right)^2 \beta. \quad (22)$$

Тогда для β получим выражение

$$\beta = \frac{v\kappa^2}{k^2 u_*^2 a} \operatorname{Re}(\chi_{1\eta} - k\chi_1)|_{\eta=0}. \quad (23)$$

Учитывая (21), преобразуем (23) окончательно к виду

$$\beta = \frac{2\kappa^2}{(ka)^2} \left[1 - \frac{v\chi_0}{u_*^2} - vka \frac{\operatorname{Re}(\chi_1)}{u_*^2} \right]_{\eta=0}. \quad (24)$$

При расчетах использовалось выражение (24), связывающее β с перепадом турбулентного потока импульса в присутствии волны, которое оказывается более удобным при численном решении по сравнению с (23), поскольку не содержит производной $\chi_{1\eta}$. Выборочные расчеты показали, что при малых ka формулы (23) и (24) приводят к близким результатам.

Для вычисления β по формуле (24) необходимо найти решение системы уравнений (10), (11) с граничными условиями (12), (14) и (18). При расчетах использовалась аппроксимация коэффициента эффективной вязкости, предложенная в [18]:

$$v = v_a \left\{ 1 + \kappa\eta^+ \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{\eta^+}{L}\right)^2\right) \right] \right\}. \quad (25)$$

Для аэродинамически гладкой поверхности $L = \approx 22.4$, что в соответствии с (16) дает высоту шероховатости $\eta_0^+ = 0.15^2$. Производилось также преобразование растяжения по вертикальной координате η [11] $z = \ln(\eta + \eta_1)$, где η_1 выбиралось порядка вязкого масштаба v_a/u_* .

Разностная аппроксимация системы (10) (с учетом преобразования растяжения по η) приводит к системе алгебраических линейных уравнений, которая решалась методом исключения Гаусса. На каждом шаге итерационной процедуры находились первые гармоники возмущений функции тока и завихренности. По ним определялись средние поля завихренности и скорости, которые потом использовались для вычисления первых гармоник на последующем шаге итерации. Итерационный процесс сходил за 10 - 15 шагов. Заметим, что подобный итерационный процесс в [12] сходил примерно за 1000 шагов.

² Заметим, что формулу (25) можно использовать для описания переходного режима обтекания, уменьшая величину параметра L (аналогично см. [19]).

В настоящее время распространено менее (впервые высказанное, по-видимому, в [20]), что величина инкремента ветровых волн сильно зависит от тонких деталей профиля скорости вблизи поверхности. Этот вопрос был изучен нами в рамках предложенной выше модели. В выражение для эффективной вязкости (25) вводилась добавка $\Delta\nu = \alpha_0 \nu_0 (\eta^+)^3 \exp[-(\eta^+/L)^2]$, позволяющая путем изменения параметра α_0 варьировать толщину буферной области между логарифмическим профилем скорости и обтекаемой поверхностью L , оставляя неизменным значение η_0^+ (см. (16)). На рис. 1 представлены зависимости β'/β от L (где β' — значение β в присутствии добавки $\Delta\nu$), построенные при различных u_* и k . Видно, что влияние тонких деталей профиля скорости на величину инкремента не велико.

На рис. 2 производится сравнение результатов вычисления β при $a \rightarrow 0$ с квазиламинарной теорией Майлса [21] и результатами работы [11], в которой применялись сложные модели замыкания для турбулентного течения. Видно, что наша модель дает результаты, занимающие промежуточное положение, причем при достаточно больших c/u_* (когда критический слой находится высоко над поверхностью) имеет практически полное совпадение со сложной моделью [11]. Добавим, что сравнение результатов теории с экспериментальными данными, проведенное в [11], показало их хорошее согласование. Таким образом, используя относительную простоту нашей модели (при достаточно хорошей точности вычисления инкремента), можно детально исследовать нелинейные характеристики взаимодействия волн с ветром.

Как показано в Приложении, при больших η появляется отрицательная добавка к скорости невозмущенного течения Δu . Она вычислялась при реализации описанной выше численной процедуры. На рис. 3а, б, в, г показаны амплитудные зависимости коэффициента взаимодействия β и добавки к скорости Δu , построенные для различных диапазонов длин волн λ и скоростей трения ветра u_* . Видно, что уменьшение инкремента

происходит одновременно с нарастанием $|\Delta u|$. При этом инкремент падает существенным образом при значениях крутизны, сравнимых с предельной крутизной для волн Стокса $ka \approx 0.44$. Причина согласованного изменения β и Δu становится понятной именно в квазилинейной модели, в которой инкремент меняется только в результате деформации профиля скорости ветра под действием волны. Появление отрицательной добавки к скорости среднего течения можно интерпретировать как эффективное увеличение высоты шероховатости.

При малых крутизнах волн ($ka \ll 1$) нелиней-

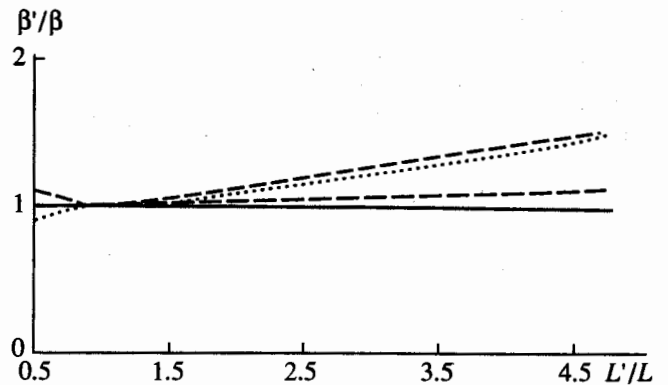


Рис. 1. Зависимость относительного изменения коэффициента взаимодействия волн с ветром β'/β от L'/L при различных скоростях трения ветра u_* и волновых числах k ($L = 22.4$ — толщина буферной области пограничного слоя для гидродинамически гладкой поверхности [18], L' — толщина буферной области при измененном профиле коэффициента эффективной вязкости у стенки; $\beta' = \beta'(L')$, $\beta = \beta(L)$):
 — $k = 0.005 \text{ см}^{-1}$, $u_* = 24 \text{ см/с}$; ---- $k = 0.005 \text{ см}^{-1}$, $u_* = 16 \text{ см/с}$;
 $k = 0.5 \text{ см}^{-1}$, $u_* = 25 \text{ см/с}$; - · - · - $k = 3 \text{ см}^{-1}$, $u_* = 30 \text{ см/с}$.

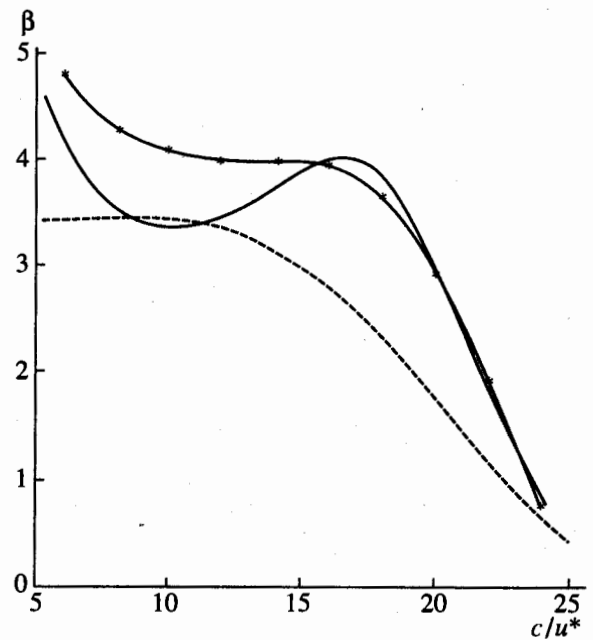


Рис. 2. Зависимости линейного коэффициента взаимодействия волн с ветром β от c/u_* : ---- — квазиламинарная модель Майлса [16], - · - · - — численная модель [11], — — предлагаемая модель. Параметр формы профиля скорости ветра $\Omega = g\eta_0/u_*^2 = 3 \times 10^{-3}$.

ная добавка к инкременту и приращение средней скорости квадратичны по амплитуде:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1(ka)^2, \quad \Delta u = \delta u_*(ka)^2. \quad (26)$$

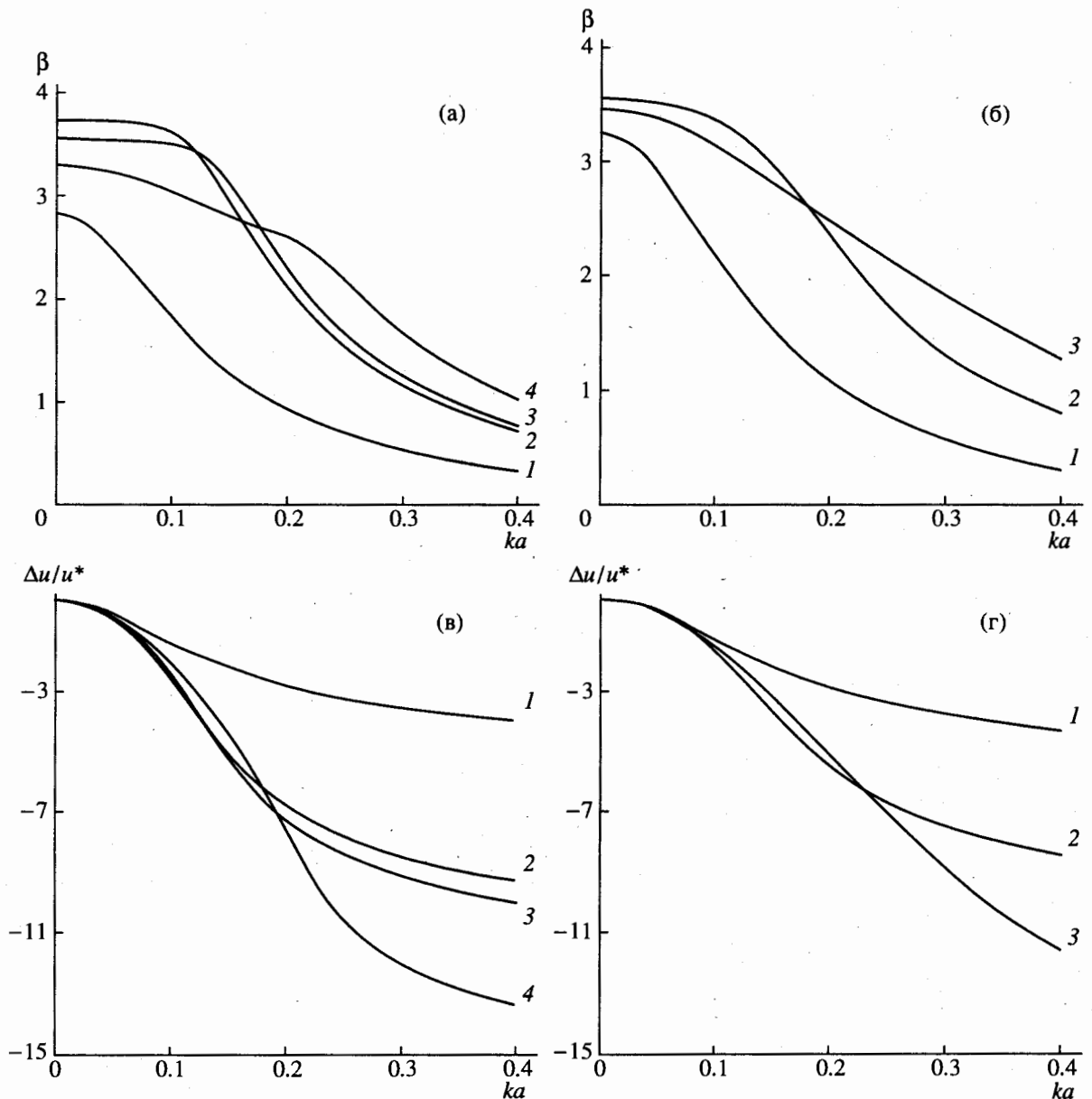


Рис. 3. Зависимости коэффициента взаимодействия волн с ветром β (а, в) и добавки к скорости $\Delta u/u^*$ (б, г) от крутизны волны: а, б — $k = 0.5 \text{ м}^{-1}$; 1 — $u_* = 18 \text{ см/с}$; 2 — $u_* = 23 \text{ см/с}$; 3 — $u_* = 24 \text{ см/с}$; 4 — $u_* = 30 \text{ см/с}$; в, г — $k = 4 \text{ м}^{-1}$; 1 — $u_* = 9 \text{ см/с}$; 2 — $u_* = 12 \text{ см/с}$; 3 — $u_* = 20 \text{ см/с}$.

На рис. 4а, б, в представлены зависимости β_0 и параметров нелинейности β_1 , δ от скорости трения ветра для различных длин волн. Видно, что $\beta_1 < 0$ при значениях $k \geq 0.5 \text{ м}^{-1}$, при которых нелинейность уменьшает скорость роста волн. При $k = 0.5 \text{ м}^{-1}$ имеется небольшая область скоростей (вблизи $u_*/c = 0.04$), где $\beta_1 > 0$, и следовательно нелинейность ускоряет рост волн. Это значение k близко к пиковому в спектре развитого ветрового волнения [22]. Однако, как видно из рис. 3а (см. кривую 3), приращение β в этом случае невелико, и следует говорить, скорее, об исчезновении зависимости β от крутизны волны при малых ka .

Для объяснения полученных зависимостей следует учесть, что линейное взаимодействие волны с потоком наиболее эффективно в локальных максимумах β_0 на рис. 4а. В этом случае наиболее сильной оказывается также нелинейность, вследствие чего максимумы $|\Delta u|$ на рис. 4б практически совпадают с максимумами β_0 . На расположение максимумов $|\beta_1|$ (см. рис. 4б) влияет также чувствительность β_0 к изменению скорости среднего течения, которое в квазилинейной теории однозначно определяет нелинейную добавку к инкременту. Поэтому они смещены относительно максимумов β_0 в сторону участка быстрого роста β_0 и

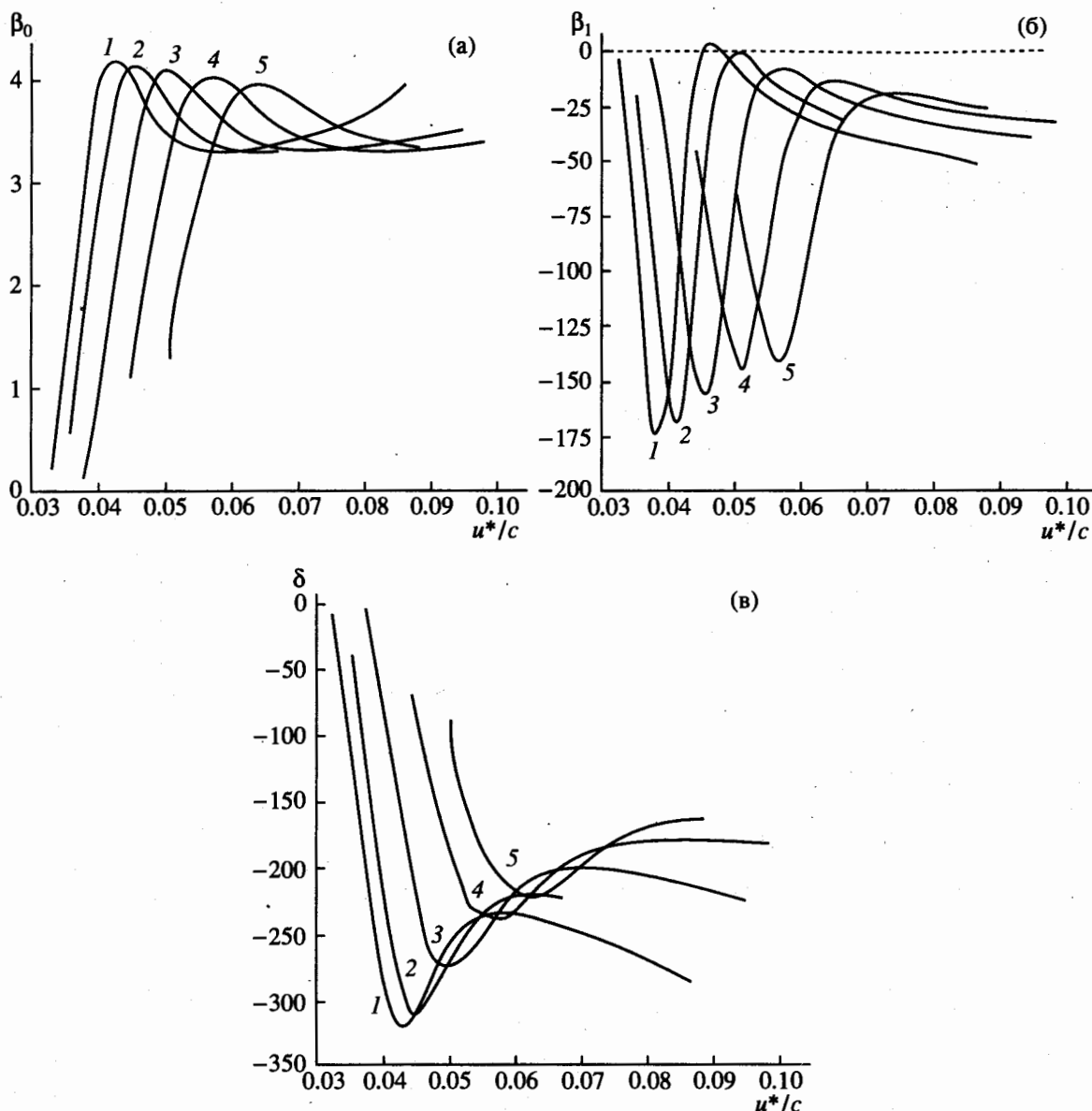


Рис. 4. Зависимости линейного коэффициента взаимодействия волн с ветром β_0 (а), параметров нелинейности β_1 (б) и δ (в) (см. (26)) от u_*/c : 1 - $k = 0.3 \text{ м}^{-1}$; 2 - $k = 0.5 \text{ м}^{-1}$; 3 - $k = 1 \text{ м}^{-1}$; 4 - $k = 2 \text{ м}^{-1}$; 5 - $k = 4 \text{ м}^{-1}$.

близки к точкам с наибольшим значением производной $\partial\beta_0/\partial u_*$.

Квадратичная по амплитуде добавка к линейному инкременту используется в теории возбуждения ветровых волн вблизи порога устойчивости [4]. Обсудим кратко ее роль на примере вычисления амплитуды стационарных волн вблизи порога генерации. Ветровую составляющую инкремента поверхностных волн и декремент их затухания из-за диссипации в воде представим соответственно в виде $\gamma^{(a)} = \gamma_0^{(a)} - \gamma_1^{(a)}(ka)^2$, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1(ka)^2$, где $\gamma_0^{(a)}$, $\gamma_1^{(a)}$ очевидным образом выражаются через β_0 и β_1 (см. (22)); $\gamma_0 = 2\nu_w k^2$ - декремент затухания волн на чистой глубокой воде [22] (ν_w - кинематичес-

кая вязкость воды); γ_1 - параметр нелинейности воды. На рис. 5 показана зависимость полного инкремента поверхностных волн $\gamma_s = \gamma_0^{(a)} - \gamma_0$, а на рис. 6 - параметра $\gamma_1^{(a)}$ от k вблизи порога генерации, которому в нашей модели соответствуют $u_{*c} = 4.95 \text{ см/с}$ и $k_c = 1 \text{ см}^{-1}$ (в теории Майлса [16] эти величины равны 4.4 см/с и 1.8 см^{-1}).

Записывая уравнение Ландау для монохроматической волны вблизи порога устойчивости, получим выражение для ее крутизны в стационарном случае:

$$ka = C \sqrt{\frac{U - U_c}{U_c}}, \tag{27}$$

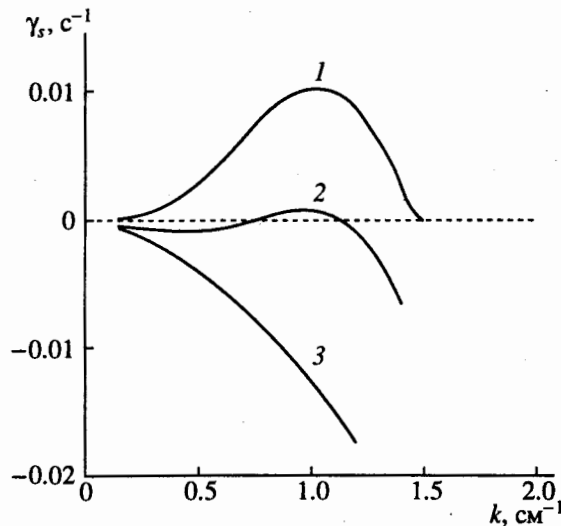


Рис. 5. Линейный инкремент поверхностных волн γ_s вблизи порога неустойчивости: 1 - $u_* = 4$ см/с; 2 - $u_* = 5$ см/с; 3 - $u_* = 6$ см/с.

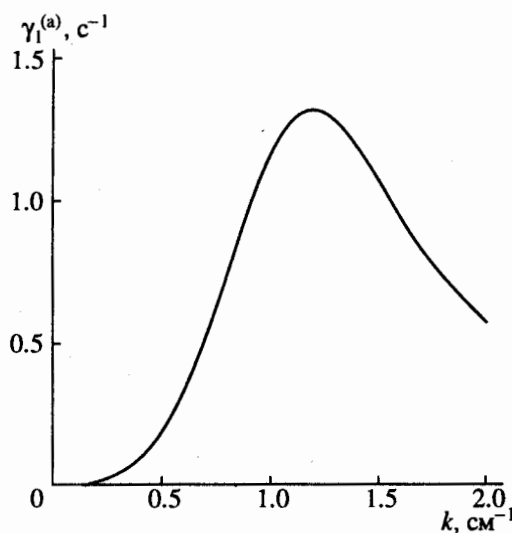


Рис. 6. Параметр нелинейности ветровой составляющей инкремента $\gamma_1^{(a)}$ вблизи порога неустойчивости ($u_* = 5$ см/с).

где U – скорость потока на некоторой высоте $\eta = l$, U_c – критическая скорость на этой высоте, а величина константы C не зависит от l :

$$C = \left(\frac{A u_* c}{\gamma_1^{(a)} + \gamma_1} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

где $A = (\partial \gamma_0^{(a)} / \partial u_*)$. Вычисления дают $A = 0.12 \text{ см}^{-1}$, $\gamma_0^{(a)} = \gamma_0 = 0.02 \text{ с}^{-1}$, $\gamma_1^{(a)} = 57 \gamma_0^{(a)}$; на высоте $l = 5$ м, выбранной в [16], $U_c = 1.4$ м/с. Для определения γ_1 в [4] использовалась формула из [23]. Расчет по этой формуле в нашем случае дает $\gamma_1 = 5.6 \gamma_0$. Та-

ким образом, на пороге устойчивости $\gamma_1^{(a)} / \gamma_1 \approx 10.2$, т.е. вклад нелинейности воздуха в (28) на порядок превосходит вклад диссипативной нелинейности воды. В результате получим $C = 0.69$, что отличается от значения 0.4 этой постоянной, предложенной в [4], где учитывался только вклад нелинейности воды. Преобладание нелинейности воздуха на пороге устойчивости можно объяснить тем, что при равенстве линейного декремента и инкремента эта нелинейность усиливается благодаря эффектам резонансного взаимодействия волны с течением (хотя они и ослабляются в значительной степени турбулентной вязкостью). Отметим, что диссипативная нелинейность воды также возрастает при приближении к резонансу волны с ее второй гармоникой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная в данной работе относительно простая квазилинейная модель динамического взаимодействия поверхностных волн с турбулентным пограничным слоем атмосферы, основанная на использовании градиентной аппроксимации первого порядка для турбулентных напряжений и изотропной турбулентной вязкости, дает значения инкремента ветровых волн, близкие к результатам расчетов в рамках значительно более сложных моделей и экспериментальным данным. Рассчитанные на ее основе нелинейные характеристики взаимодействия двумерной волны с ветром существенным образом зависят от скорости трения ветра и диапазона длин волн.

Согласно современным представлениям, важную роль в формировании картины ветрового волнения играют процессы нелинейной трансформации спектра волн в сторону малых волновых чисел [5, 6]. Они обеспечивают наполнение спектра волнения в области метровых и более длинных волн, лежащих на “хвосте” зависимости инкремента ветровой неустойчивости от волнового числа, и в установившемся режиме не сопровождаются передачей энергии вниз по спектру. Какая-либо увязка этих представлений с поведением амплитудных зависимостей инкремента ветровых волн до сих пор не проводилась. В этой связи заметим, что такого рода зависимости, построенные в данной работе, можно применить к процессам формирования ветрового волнения по меньшей мере в двух случаях. Во-первых, можно моделировать в виде одной квазимонохроматической волны поведение относительно узкого пика в спектре развивающегося или установившегося волнения. Во-вторых, амплитудную зависимость инкремента можно привлечь к рассмотрению “локальных волн” с волновым числом k , интенсивность которых определяется областью спектра волнения с волновыми числами, превышающими k . Нетрудно видеть, что падение инкремен-

та с ростом амплитуды еще в большей степени ослабляет влияние ветровой неустойчивости на нелинейные процессы трансформации спектра. Наиболее существенным такое ослабление оказывается в случае сильного ветра, когда крутизна волн приближается к предельной и начинается их обрушение.

Вычисление нелинейного инкремента имеет важное значение для описания поля поверхностных волн вблизи порога возбуждения, так как вклад нелинейной добавки к инкременту в этом случае преобладает над вкладом диссипативной нелинейности воды. В перспективе с помощью предложенной модели может быть построена достаточно точная динамическая теория генерации волн ветром вблизи порога устойчивости, учитывающая влияние пленок поверхностно-активных веществ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим установление среднего течения при возбуждении волны. Для переменной u_0 из (6) следует уравнение

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \eta}(v u_{0\eta}) = \frac{dT}{d\eta} \quad (\text{П.1})$$

Строго говоря, при возбуждении волны возникает зависимость T от времени, которая связана как с изменением ее амплитуды a , так и с развитием самого среднего течения u_0 . Однако при малых отклонениях u_0 от невозмущенного профиля их вкладом в "источник" T можно пренебречь.

В силу эволюционного характера диффузионного уравнения (П. 1) выполняется принцип причинности, и в любой фиксированный момент t профиль u_0 при $\eta \rightarrow \infty$ должен переходить в невозмущенный профиль (15). При $\eta = 0$ по-прежнему выполнено условие (14).

Для решения (П. 1) воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений. Сравнивая члены в левой части (П. 1) при $v = ku_*\eta$, можно ввести диффузионный масштаб по η : $l_{\text{dif}} = ku_*t$. Будем считать, что возбуждение волны и установление стационарного режима происходит адиабатически в том смысле, что для соответствующих масштабов времени выполнено условие $kl_{\text{dif}} \gg 1$. Тогда при $\eta \sim 1/k$ вклад члена $\partial u_0/\partial t$ в (П. 1) имеет порядок $1/kl_{\text{dif}} \ll 1$, и профиль u_0 в этой области квазистационарен. Используя граничное условие (14), решение уравнения (П. 1) в отсутствие члена $\partial u_0/\partial t$ можно представить при $k\eta \gg 1$ в виде

$$u_0(\eta, t) \rightarrow \frac{\alpha(t)}{ku_*} \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \Delta u - c, \quad (\text{П.2})$$

где $\Delta u = -\int_0^\infty T(\eta)/v(\eta)d\eta$, $\alpha(t)$ – произвольная функция времени. Предел $\alpha(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяет искомое краевое условие для (13).

Для отыскания $\alpha(t)$ необходимо срастить (П. 2) с решением нестационарной задачи (П. 1), построенным в области $\eta/l_{\text{dif}} \sim 1$. Переходя в (П. 1) к переменным $\vartheta = 1/\ln(ku_*t/\eta_0)$ и $H = \eta/ku_*t$, получим уравнение вида

$$\vartheta^2 \frac{\partial u_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial H} \left(H \frac{\partial u_0}{\partial H} \right) - H \frac{\partial u_0}{\partial H} = 0. \quad (\text{П.3})$$

В записи через H , ϑ граничное условие (15) при $\eta \rightarrow \infty$ преобразуется к виду

$$u_0|_{H \rightarrow \infty} = \frac{u_*}{\kappa} \ln H - c + \frac{u_*}{\kappa} \vartheta^{-1}. \quad (\text{П.4})$$

Учитывая (П. 4), будем искать асимптотическое решение (П. 3) при $\vartheta \rightarrow 0$ в виде ряда:

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \vartheta^{m-1} f_m(H). \quad (\text{П.5})$$

Подставляя (П. 5) в (П. 3), решая уравнение для f_m с граничными условиями (П. 4) и определяя асимптотики возникающих при этом интегралов при $H \rightarrow 0$, для первых трех коэффициентов ряда (П. 5) получим с точностью до поправок $O(H \ln(H))$ выражения:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 + C_0(\ln H + K_0), \\ f_1 &= -\frac{c\kappa}{u_*} + \ln H + C_1(\ln H + K_1), \\ f_2 &= C_2(\ln H + K_2), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где $C_{0,1,2}$ – произвольные постоянные, $K_{0,1,2}$ – числовые коэффициенты, значения которых далее не используются. Определяя $\alpha(t)$ из условия сращивания разложений (П. 2) и (П. 5) (с учетом (П. 6)), получим вместо (П. 2) выражения для профиля скорости во внешней части квазистационарной области ($1/k \ll \eta \ll l_{\text{dif}}$):

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \left[1 - \frac{\Delta u}{u_* \ln \left(\frac{ku_*t}{\eta_0} \right)} \right] \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \Delta u - c. \quad (\text{П.7})$$

Решение (П. 7) описывает установление профиля u_0 при $\Delta u = \text{const}$, т.е. после того, как произошло установление амплитуды волны. Из (П. 7) следует, что при фиксированных $\eta \gg 1/k$ и $t \rightarrow \infty$ поток импульса стремится к u_*^2 , т.е. выполняется краевое условие (18) для (13). В то же время, скорость получает постоянную добавку $\Delta u < 0$ (пере-

пад T при переходе от $\eta = \infty$ к $\eta = 0$ положителен при наличии неустойчивости). Добавка к скорости Δu исчезает на расстояниях порядка l_{dif} по η . Поток импульса при этом также изменяется с ростом η , однако его перепад между предельными значениями при больших и малых η на больших временах становится малым по сравнению с невозмущенным значением u_*^2 . Вид решения (П. 7) показывает, что в случае нестационарного волнового поля в граничном условии (18) должна появиться нелокальная по времени зависимость от амплитуды a .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8075).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макин В.К.* О передачи энергии ветра поверхностным гравитационным волнам // *Океанология*. 1983. Т. 23. № 4. С. 569 - 575.
2. *Gent P.R., Taylor P.A.* A numerical model of the air flow above waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P. 105 - 128.
3. *Gent P.R.* A numerical model of the air flow above waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 82. P. 349 - 369.
4. *Fabrikant A.L.* On nonlinear water waves under a light wind and Landau type equations near the stability threshold // *Wave Motion*. 1980. V. 2. P. 355 - 360.
5. *Захаров В.Е., Заславский М.М.* Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слабо-турбулентной теории ветровых волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1982. Т. 18. № 9. С. 970 - 979.
6. *Захаров В.Е., Заславский М.М.* Интервалы накачки и диссипации в кинетическом уравнении слабо-турбулентной теории ветровых волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1982. Т. 18. № 10. С. 1066 - 1076.
7. *Реутов В.П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1980. Т. 16. № 12. С. 1266 - 1275.
8. *Андронов А.А., Фабрикант А.Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // *Нелинейные волны* / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 68 - 104.
9. *Hsu C.-T., Hsu E.Y.* On the structure of turbulent flow over a progressive water wave: theory and experiment in a transformed wave following coordinate system. Pt. 2 // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 131. P. 123 - 153.
10. *Chalikov D.V.* Numerical simulation of the boundary layer above water waves // *Boundary Layer Meteorology*. 1986. V. 34. P. 63 - 98.
11. *Al-Zanaidi M.A., Hui W.H.* Turbulent airflow over water waves - a numerical study // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 225 - 246.
12. *Jenkins A.D.* A quasi-linear eddy-viscosity model for the energy and momentum to wind waves using conservation-law equations in a curvilinear coordinate system // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22. № 8. P. 843 - 858.
13. *Фабрикант А.Л.* Квазилинейная теория ветровых волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1976. Т. 12. № 8. С. 858 - 862.
14. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. 696 с.
15. *Benjamin Brooke T.* Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. P. 161 - 205.
16. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shear flows. Pt. 4 // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. Pt. 3. P. 433 - 448.
17. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shear flows // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 3. P. 185 - 204.
18. *Смоляков А.В.* Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // *Акуст. ж.* 1973. Т. 19. Вып. 3. С. 420 - 425.
19. *Lin T.C., Bywater R.J.* Turbulence models for high-speed rough-wall boundary layers // *AIAA J.* 1982. V. 20. № 3. P. 325 - 333.
20. *Davis R.E.* On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Pt. 2. P. 287 - 306.
21. *Conte S.D., Miles J.W.* On the numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1959. V. 7. № 4. P. 361 - 366.
22. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
23. *Красильников В.А., Павлов В.И.* О нелинейном затухании плоских монохроматических волн на поверхности жидкости // *Вестн. Моск-го ун-та. Физика и астрономия*. 1972. Т. 13. № 1. С. 94 - 98.

On the Nonlinear Effects Due to Water Wave Interaction with a Turbulent Wind

V. P. Reutov, Yu. I. Troitskaya

The nonlinear interaction of a two-dimensional water wave with a turbulent atmospheric boundary layer is investigated. An orthogonal curvilinear coordinate frame, an isotropic model of turbulent viscosity and approximation of aerodynamically smooth surface are used. The analysis is performed in the framework of a quasilinear model for the interaction of the mean wind with the wave field. The amplitude dependencies of the surface wave growth rate and of the additional contribution to the mean wind velocity far apart from the surface are evaluated for a broad range of wavelengths and wind friction velocities. The role of the wind current nonlinearity in the excitation of water waves near the stability threshold is discussed.